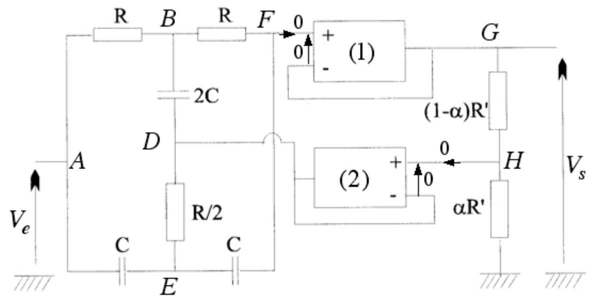
Coupe-bande.

Question 1 :

On considère le montage de la figure ci-dessous, où la résistance entre G et la masse est un potentiomètre qui permet de régler la résistance entre H et la masse à toute valeur entre 0 et R'. Déterminer la fonction de transfert de ce montage.



Commençons par dégrossir :

1. On a directement $V_A = V_e$, tension d'entrée et $V_G = V_s$, tension de sortie.
2. Les amplificateurs opérationnels 1 et 2 sont montés en suiveurs, d'où $V_F = V_G = V_s$ et $V_H = V_D$
3. L'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel 2 ne consomme pas de courant, donc le pont diviseur en sortie fonctionne de façon idéale et

$$V_D = V_H = \frac{\alpha\,R'}{(1-\alpha)\,R' + \alpha\,R'}\,V_G = \alpha\,V_G = \alpha\,V_s$$

Puis comptons sur nos doigts : il y a sept noeuds et sept potentiels de A à H (il n'y a pas de nœud C pour éviter toute confusion avec la capacité C). Au vu de ce qui précède, un potentiel est supposé connu et égal à V_e, quatre sont égaux soit à V_s, soit à $\alpha\,V_s$ avec α donné, donc ne comptent que pour une seule inconnue et il en reste deux inconnus (V_B et V_E). Nous avons donc trois inconnues, il nous faut donc trois équations reliant ces potentiels et rien qu'eux (je veux dire sans introduire d'intensités inconnues). Le théorème de Millmann semble donc la piste idéale à condition toutefois de l'appliquer là où il est licite. En particulier, on ne connaît pas le courant qui sort de l'A.O.2 vers D et on ne connaît pas l'impédance de cette branche : le nœud D est exclu. Même chose pour le nœud A, car on ne connaît pas l'impédance de la branche qui relie le générateur à A. Par contre, on peut l'appliquer au nœud F, car la branche qui conduit vers l'A.O.1 ne consomme pas de courant et vis-à-vis du théorème de Millmann, c'est comme si elle n'existait pas. On l'applique donc en F et bien sûr en B et E qui sont des nœuds classiques, nous avons donc nos trois équations.

Bien comprendre qu'à ce stade, l'exercice est TERMINÉ. Il ne reste que de menus calculs mathématiques mais toute la physique a été faite.

La logique du théorème de Millmann fait intervenir les admittances, inverse des impédances. Aux résistances R et $R/2$ correspondent des admittances (conductances dans ce cas) $G = 1/R$ et donc $2\,G$ et aux capacités C et $2\,C$ des admittances $\jmath\,C\,\omega$ et $2\,\jmath\,C\,\omega$

$$V_B = \frac{G\,V_A + G\,V_F + 2\,\jmath\,C\,\omega\,V_D}{G + G + 2\,\jmath\,C\,\omega} = \frac{G\,V_e + (G + 2\,\jmath\,\alpha\,C\,\omega)\,V_s}{2\,(G + \jmath\,C\,\omega)}$$

$$V_E = \frac{\jmath\,C\,\omega\,V_A + \jmath\,C\,\omega\,V_F + 2\,G\,V_D}{\jmath\,C\,\omega + \jmath\,C\,\omega + 2\,G} = \frac{\jmath\,C\,\omega\,V_e + (2\,\alpha\,G + \jmath\,C\,\omega)\,V_s}{2\,(G + \jmath\,C\,\omega)}$$

$$V_F = V_s = \frac{G\,V_B + \jmath\,C\,\omega\,V_E}{G + \jmath\,C\,\omega}$$

Pause : on regarde le système, on respire à fond pour oxygéner le cerveau et l'on voit alors qu'en reportant les deux premières relations dans la dernière, on aura une relation liant V_s et V_e d'où il sera aisé de tirer la fonction de transfert.

$$V_s = \frac{G\,[G\,V_e + (G + 2\,\jmath\,\alpha\,C\,\omega)\,V_s] + \jmath\,C\,\omega\,[\jmath\,C\,\omega\,V_e + (2\,\alpha\,G + \jmath\,C\,\omega)\,V_s]}{2\,(G + \jmath\,C\,\omega)^2}$$

$$2\,(G + \jmath\,C\,\omega)^2\,V_s = [G^2 + (\jmath\,C\,\omega)^2]\,V_e + [G\,(G + 2\,\jmath\,\alpha\,C\,\omega) + \jmath\,C\,\omega\,(2\,\alpha\,G + \jmath\,C\,\omega)]\,V_s$$

$$[G^2 + 4\,(1-\alpha)\,\jmath\,G\,C\,\omega - C^2\,\omega^2]\,V_s = (G^2 - C^2\,\omega^2)\,V_e$$

$$\mathcal{H}(\jmath\,\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{G^2 - C^2\,\omega^2}{G^2 + 4\,(1-\alpha)\,\jmath\,G\,C\,\omega - C^2\,\omega^2}$$

soit encore, en multipliant haut et bas par $1/G^2 = R^2$

$$\mathcal{H}(\jmath\,\omega) = \frac{1 - R^2\,C^2\,\omega^2}{1 + 4\,(1-\alpha)\,\jmath\,R\,C\,\omega - R^2\,C^2\,\omega^2}$$

On peut poser $\omega_0 = 1/(R\,C)$ (pulsation coupée) puis $x = \omega/\omega_0$ (ce qui revient à prendre ω_0 comme unité. Alors

$$\mathcal{H}(\jmath\,x) = \frac{1 - x^2}{1 + 4\,(1-\alpha)\,\jmath\,x - x^2}$$

Question 2 :
Déterminer les valeurs asymptotiques et les valeurs particulières et préciser la nature de ce filtre. Quelle est la bande rejetée à -3 dB ? Quel intérêt y-a-il à pouvoir régler la valeur de α ? Donner un exemple d'utilisation possible.

On a manifestement :

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{H}(\jmath\,x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \mathcal{H}(\jmath\,x) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\jmath\,1) = 0$$

ce qui est le comportement d'un filtre coupe-bande coupant la pulsation ω_0 correspondant à $x = 1$.

Cherchons les extrémités de la bande rejetée à -3 dB, ce qui correspond à $|\mathcal{H}(\jmath\,x)| = 1/\sqrt{2}$. Il est astucieux ici de réécrire :

$$\mathcal{H}(\jmath\,x) = \frac{1}{1 + \jmath\,\frac{4\,(1-\alpha)\,x}{1-x^2}}$$

En effet, puisque $\sqrt{2} = \sqrt{1 + (\pm 1)^2}$, il est clair qu'on cherche les valeurs de x telles que :

$$\frac{4\,(1-\alpha)\,x}{1 - x^2} = \pm 1$$

$$x^2 \pm 4\,(1-\alpha)\,x - 1 = 0$$

de discriminant réduit $\Delta' = 4\,(1-\alpha)^2 + 1$ et dont les racines sont :

$$x = \pm\,2\,(1-\alpha) \pm \sqrt{1 + 4\,(1-\alpha)^2}$$

Les racines positives et la largeur de bande sont :

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = -2\,(1-\alpha) + \sqrt{1 + 4\,(1-\alpha)^2}$$

$$x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = 2\,(1-\alpha) + \sqrt{1 + 4\,(1-\alpha)^2}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = x_2 - x_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = 4\,(1-\alpha)$$

Au vu de ce résultat, on voit que régler α, c'est régler la largeur de bande rejetée. Une bande très étroite est envisageable, par exemple avec $\alpha\, R' = 100\, k\Omega$ et $(1-\alpha)\, R' = 100\,\Omega$, on a $1 - \alpha \approx 0,001$.

L'électronique est alimentée en continu fabriqué par redressement bi-alternance et lissage de la tension du secteur. Le lissage n'est jamais parfait et l'alimentation contient toujours une composante alternative de fréquence 100 Hz (50 Hz redressé) qui peut se retrouver en sortie du montage. Un filtre «rejecteur» réglé sur 100 Hz, de bande rejetée étroite pour ne pas perturber les autres fréquences, peut pallier ce problème.